PRINCIPES MATHÉMATIQUES DE LA PHILOSOPHIE NATURELLE,

Par feue Madame la Marquise DU CHASTELLET.

TOME PREMIER.



A PARIS,

Chez { DESAINT & SAILLANT, rue S. Jean de Beauvais.
ET
LAMBERT, rue & à côté de la Comédie Françoise, au Parnasse. }

M. D. CC. LVI.

AVEC APPROBATION, ET PRIVILEGE DU ROI.



ſans ceſſe, limites dont elles peuvent toujours approcher plus près que d'aucune différence donnée, qu'elles ne peuvent jamais paſſer, & qu'elles ne ſauroient atteindre, ſi ce n'eſt dans l'infini.

On comprendra ceci plus clairement dans les quantités infiniment grandes. Si deux quantités, dont la différence eſt donnée, augmentent à l'infini, leur derniere raiſon ſera donnée, & ſera certainement la raiſon d'égalité; cependant les dernieres, ou les plus grandes quantités auſquelles répond cette raiſon, ne ſeront point des quantités données. Donc, lorſque je me ſervirai dans la ſuite, pour être plus clair, des mots de *quantités évanouiſſantes*, de *quantités dernieres*, de *quantités très petites*, il ne faut pas entendre par ces expreſſions des quantités d'une grandeur déterminée, mais toujours des quantités qui diminuent à l'infini.

SECONDE SECTION.

De la recherche des forces centripetes.

PROPOSITION I. THÉOREME I.

*Dans les mouvemens curvilignes des corps, les aires décrites * autour d'un centre immobile, ſont dans un même plan immobile, & ſont proportionnelles au temps.*

Suppoſé que le temps ſoit diviſé en parties égales, & que dans la premiere partie de ce temps, le corps, par la force qui lui a été imprimée, décrive la ligne AB: ſuivant la premiere loi du mouvement dans un ſecond temps égal au premier, il décriroit, ſi rien ne l'en empêchoit, la droite $BC = AB$; Donc en tirant au centre S, les rayons AS, BS, cS, les aires ASB, BSc ſeroient égales. Suppoſé que lorſque ce corps eſt arrivé en B, la force Fig. 13.

* Les aires décrites par un corps autour d'un centre ſont les eſpaces terminés par les rayons qui partent de ce centre, & par l'arc ſur lequel s'appuient ces rayons.

centripete agiſſe ſur lui par un ſeul coup, mais aſſez puiſſant pour l'obliger à ſe détourner de la droite *B c* & à ſuivre la droite *B C*. Si on tire la ligne *C c* parallele à *B S*, laquelle rencontre *B C* en *C*, à la fin de ce ſecond temps, le corps (ſelon le 1. Corollaire des loix) ſera en *C* dans le même plan que le triangle *A S B*.

En tirant enſuite la ligne *S C*, le triangle *S B C* ſera égal au triangle *S B c*, à cauſe des paralleles *S B*, *C c*, donc il ſera auſſi égal au triangle *S A B*.

De même, ſi la force centripete agit ſucceſſivement ſur le corps en *C*, *D*, *E*, &c. & qu'elle lui faſſe décrire à chaque petite portion de temps les droites *C D*, *D E*, *E F*, &c. ces lignes ſeront toutes dans le même plan ; & le triangle *S C D* ſera égal au triangle *S B C*, le triangle *S D E* au triangle *S C D*, & le triangle *SEF* au triangle *S D E*. Ce corps décrira donc en des temps égaux des aires égales dans un plan immobile : & en compoſant, les ſommes des aires quelconques *S A D S*, *S A F S* ſeront entr'elles comme les temps employés à les décrire.

Qu'on imagine maintenant que le nombre des triangles augmente & que leur largeur diminue à l'infini ; il eſt clair (par le Cor. 4. du Lemme 3.) que leur dernier périmétre *A D F*, ſera une ligne courbe. Donc la force centripete, qui retire le corps à tout moment de la tangente de cette courbe, agit ſans interruption, & les aires quelconques *S A D S*, *S A F S*, qui étoient proportionnelles aux temps employés à les décrire, leur ſeront encore proportionnelles dans ce cas. C. Q. F. D.

Cor. 1. La vîteſſe d'un corps attiré vers un centre immobile dans un eſpace non réſiſtant, eſt réciproquement comme la perpendiculaire tirée de ce centre à la ligne qui touche la courbe au lieu où le corps ſe trouve ; car la vîteſſe de ce corps aux lieux *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, eſt proportionnelle aux baſes *A B*, *B C*, *C D*, *D E*, *E F* des triangles égaux ; & ces baſes ſont entr'elles en raiſon réciproque des perpendiculaires qui leur ſont abaiſſées du centre.

Cor. 2. Si on fait un parallélogramme *ABCV*, sur les cordes *AB*, *BC*, de deux arcs successivement parcourus par le même corps en des temps égaux dans des espaces non résistans, & que la diagonale *BV* de ce parallélogramme ait la même position que celle qu'elle a à la fin, lorsque ces arcs diminuent l'infini, cette diagonale prolongée passera par le centre des forces.

Cor. 3. Si on fait les parallélogrammes *ABCV*, *DEFZ*, sur les cordes *AB*, *BC* & *DE*, *EF* des arcs décrits en temps égaux dans des espaces non résistans, les forces en *B* & en *E* seront entr'elles dans la derniere raison des diagonales *BV*, *EZ*, lorsque ces arcs diminueront à l'infini; car les mouvemens du corps, suivant les lignes *BC* & *EF*, sont composés (par le Cor. 1. des loix) des mouvemens suivant les lignes *Bc*, *BV* & *Ef*, *EZ*: or, *BV* & *EZ*, qui sont égales à *Cc*, & à *Ff*, ont été parcourues par les impulsions de la force centripete en *B* & en *E*, selon ce qui a été démontré dans cette proposition; donc elles sont proportionnelles à ces impulsions.

Cor. 4. Les forces par lesquelles les corps, qui se meuvent dans des espaces libres, sont détournés du mouvement rectiligne & contraints à décrire des courbes, sont entr'elles comme les fléches des arcs évanouissants parcourus en temps égaux, & ces fléches convergent vers le centre des forces, & coupent les cordes des arcs évanouissants en deux parties égales; car ces fléches sont la moitié des diagonales dont on vient de parler dans le Cor. 3.

Cor. 5. Ainsi ces mêmes forces sont à la force de la gravité, comme les fléches des arcs décrits sont aux fléches verticales des arcs paraboliques que les projectiles décrivent dans le même temps.

Cor. 6. Tout ce qui a été démontré jusqu'ici sera encore vrai, par le Cor. 5. des loix, lorsque les plans dans lesquels les corps se meuvent, & les centres des forces placés dans ces plans, au lieu d'être en repos, se mouveront uniformément en ligne droite.

PROPOSITION II. THÉOREME II.

La force centripete d'un corps qui se meut dans une ligne courbe décrite sur un plan, & qui parcourt autour d'un point immobile, ou mû uniformément en ligne droite, des aires proportionnelles au temps, tend nécessairement à ce point.

Cas 1. Tout corps qui se meut dans une courbe est détourné du mouvement rectiligne par une force qui agit sur lui, par la premiere loi; & cette force qui contraint le corps à se détourner de la ligne droite, & à décrire en temps égaux les petits triangles égaux *SAB*, *SBC*, *SCD*, &c. autour du point immobile *S*, agit au lieu *B* suivant une ligne parallele à *cC*, par la seconde loi, c'est-à-dire, suivant la ligne *BS*; & au lieu *C* suivant une ligne parallele à *dD*, c'est-à-dire suivant la ligne *SC*, &c. Elle agit donc toujours selon des lignes qui tendent à ce point immobile *S*. *C. Q. F. D.*

Cas. 2. Et par le Corollaire 5. des loix, le mouvement du corps est le même, soit que la superficie dans laquelle s'éxécute ce mouvement soit en repos, soit qu'elle se meuve uniformément en ligne droite en emportant avec elle le centre, la courbe décrite, & le corps décrivant.

Cor. 1. Dans les espaces ou milieux non résistans, si les aires ne sont pas proportionnelles au temps, les forces centripetes ne tendent pas au concours des rayons; mais elles déclinent vers le côté vers lequel le corps se meut si la description des aires est accélérée; & elles déclinent vers le côté opposé si elle est retardée.

Cor. 2. Dans les milieux résistans, si la description des aires est accélérée, les directions des forces déclinent aussi vers le côté vers lequel le mouvement du corps est dirigé.

SCHOLIE.

Le corps peut être animé par une force centripete composée de plusieurs forces. Dans ce cas, le sens de la Proposition précé-

dente est, que la force qui résulte de toutes les autres tend au point *S*. De plus, si quelqu'autre force agit continuellement selon une ligne perpendiculaire à la superficie décrite, le corps se détournera du plan de son mouvement; mais la quantité de la superficie décrite n'augmentera ni ne diminuera, ainsi on peut la négliger dans la composition des forces.

PROPOSITION III. THÉOREME III.

Si un corps décrit autour d'un autre corps qui se meut d'une façon quelconque des aires proportionnelles au temps, la force qui anime le premier est composée d'une force qui tend vers le second, & de toute la force accélératrice par laquelle ce second corps est animé.

Soit le premier corps *L* & le second *T*: Si une force nouvelle égale & contraire à celle qui agit sur le corps *T*, agit sur ces deux corps, selon des lignes paralleles, le premier corps *L* continuera, par le Cor. 6. des loix, à décrire autour du corps *T* les mêmes aires qu'auparavant; mais la force qui agissoit sur le corps *T* sera détruite par cette nouvelle force qu'on a supposé lui être égale & contraire. Donc, par la premiere loi, ce corps *T* abandonné à lui-même demeurera en repos, ou se mouvera uniformément en ligne droite; & le corps *L*, qui est animé alors par la différence de ces forces, c'est-à-dire par la force restante, continuera à décrire des aires proportionnelles au temps autour du corps *T*. Donc par le Théor. 2. la différence de ces forces tend vers le corps *T* comme à son centre. *C. Q. F. D.*

Cor. 1. Il suit de-là, que si un corps *L* décrit autour d'un autre corps des aires proportionnelles au temps, & que de la force totale qui presse le corps *L*, soit simple, soit composée de plusieurs forces, selon le Cor. 2. des loix, on soustrait toute la force accélératrice qui agit sur l'autre corps; la force restante par laquelle le corps *L* est animé, tendra tout entiere vers l'autre corps *T* comme centre.

Cor. 2. Et si ces aires ne s'éloignent pas beaucoup d'être pro-

portionnelles au temps, la force restante sera à peu près dirigée vers le corps *T*.

Cor. 3. Et réciproquement, si la force restante tend à peu près vers le corps *T*, les aires seront à peu près proportionnelles au temps.

Cor. 4. Si le corps *L* décrit autour du corps *T* des aires qui s'éloignent beaucoup de la proportionnalité des temps, & que ce corps *T* soit en repos, ou qu'il se meuve uniformément en ligne droite, la force centripete qui tend vers ce corps est nulle, ou bien elle est mêlée & composée avec d'autres forces très puissantes; & la force totale, composée de toutes ces forces, s'il y en a plusieurs, sera dirigée vers un autre centre mobile ou immobile. Il en est de même, lorsque le corps *T* se meut d'un mouvement quelconque, pourvû que l'on prenne pour force centripete, celle qui reste après qu'on a soustrait la force totale qui agit sur le corps *T*.

SCHOLIE.

Comme la description des aires égales en temps égaux marque que le corps qui décrit ces aires éprouve l'action d'une force qui agit sur lui, qui le retire du mouvement rectiligne, & qui le retient dans son orbite; pourquoi ne prendrions-nous pas dans la suite cette description égale des aires pour l'indice d'un centre autour duquel se fait tout mouvement circulaire dans des espaces non résistans?

PROPOSITION IV. THÉOREME IV.

Les corps qui parcourent uniformément différens cercles sont animés par des forces centripetes qui tendent au centre de ces cercles, & qui sont entr'elles comme les quarrés des arcs décrits en temps égal, divisés par les rayons de ces cercles.

Ces forces tendent au centre des cercles par la Proposition 2. & le Corollaire 2. de la Proposition 1. & elles sont entr'elles, par

le Corollaire 4. de la Propoſition 1. comme les ſinus verſes des arcs décrits dans de très petits temps égaux, c'eſt-à-dire par le Lemme 7. comme les quarrés de ces mêmes arcs diviſés par les diamétres de leurs cercles. Or, comme ces petits arcs ſont proportionnels aux arcs décrits dans des temps quelconques égaux, & que les diamétres ſont comme les rayons, les forces ſeront comme les quarrés des arcs quelconques décrits dans des temps égaux diviſés par les rayons. *C. Q. F. D.*

Cor. 1. Comme ces arcs ſont proportionnels aux vîteſſes des corps, les forces centripetes ſeront en raiſon compoſée de la raiſon doublée des vîteſſes directement, & de la raiſon ſimple des rayons inverſement.

Cor. 2. Et comme les temps périodiques ſont en raiſon compoſée de la raiſon directe des rayons, & de la raiſon inverſe des vîteſſes; les forces centripetes ſeront en raiſon compoſée de la raiſon directe des rayons, & de la raiſon doublée inverſe des temps périodiques.

Cor. 3. Donc, ſi les temps périodiques ſont égaux, & que les vîteſſes ſoient par conſéquent comme les rayons; les forces centripetes ſeront auſſi comme les rayons: & au contraire.

Cor. 4. Si les temps périodiques & les vîteſſes ſont en raiſon ſousdoublée des rayons; les forces centripetes ſeront égales entre elles: & au contraire.

Cor. 5. Si les temps périodiques ſont comme les rayons, & que par conſéquent les vîteſſes ſoient égales, les forces centripetes ſeront en raiſon renverſée des rayons: & au contraire.

Cor. 6. Si les temps périodiques ſont en raiſon ſeſquiplée des rayons, & que par conſéquent les vîteſſes ſoient réciproquement en raiſon ſousdoublée des rayons; les forces centripetes ſeront réciproquement comme les quarrés des rayons: & au contraire.

Cor. 7. Et généralement, ſi le temps périodique eſt comme une puiſſance quelconque R^n du rayon, & que par conſéquent la

vîteſſe ſoit réciproquement comme la puiſſance R^{n-1} du rayon; la force centripete ſera réciproquement comme la puiſſance R^{2n-1} du rayon : & au contraire.

Cor. 8. On peut trouver de la même maniere tout ce qui concerne les temps, les vîteſſes & les forces avec leſquelles les corps décrivent des parties ſemblables de figures quelconques ſemblables, qui ont leurs centres poſés de même dans ces figures; il ne faut pas pour ces cas d'autres démonſtrations que les précédentes, pourvû qu'on ſubſtitue la deſcription égale des aires au mouvement uniforme, & qu'on mette les diſtances des corps aux centres à la place des rayons.

Cor. 9. Il ſuit auſſi de la même démonſtration, que l'arc qu'un corps décrit pendant un temps quelconque en tournant uniformément dans un cercle en vertu d'une force centripete donnée, eſt moyen proportionnel entre le diamétre de ce cercle & la ligne que le corps parcoureroit en tombant par la même force donnée & pendant le même temps.

SCHOLIE.

Le cas du Corollaire 6. eſt celui des corps céléſtes, (comme nos Compatriotes *Hook*, *Wren* & *Halley* l'ont chacun conclu des obſervations) c'eſt pourquoi j'expliquerai fort au long dans la ſuite de cet Ouvrage tout ce qui a rapport à la force centripete qui décroît en raiſon doublée des diſtances au centre.

De plus, par la Propoſition précédente & par ſes Corollaires, on peut trouver la proportion qui eſt entre la force centripete & une force quelconque connue, telle que la gravité ; car ſi le corps tourne dans un cercle concentrique à la terre par la force de la gravité, la gravité ſera ſa force centripete : or, connoiſſant d'un côté la deſcente des graves, & de l'autre le temps de la révolution, & l'arc décrit dans un temps quelconque, on aura par le Corollaire 9. de cette Propoſition la proportion cherchée entre la gravité & la force centripete. C'eſt par des propoſitions ſemblables

bles que M. *Hugens*, dans ſon excellent Traité *de Horollogio oſcillatorio*, a comparé la force de la gravité avec les forces centrifuges des corps qui circulent.

On pourroit encore démontrer cette propoſition de cette maniere. Soit ſuppoſé un Polygone d'un nombre de côtés quelconques inſcrit dans un cercle. Si le corps, en parcourant les côtés de ce Poligone avec une vîteſſe donnée, eſt réfléchi par le cercle à chacun des angles de ce Poligone, la force avec laquelle ce corps frappe le cercle à chaque réfléxion ſera comme ſa vîteſſe : donc la ſomme des forces en un temps donné ſera comme cette vîteſſe multipliée par le nombre des réfléxions, c'eſt-à-dire, (ſi le Poligone eſt donné d'eſpece) comme la ligne parcourue dans ce temps, laquelle doit être augmentée ou diminuée dans la raiſon qu'elle a elle-même au rayon de ce cercle; c'eſt-à-dire, comme le quarré de cette ligne diviſé par le rayon : ainſi ſi les côtés du Poligone diminuant à l'infini, le Poligone vient à coïncider enfin avec le cercle, la ſomme des forces ſera alors comme le quarré de l'arc parcouru dans un temps donné diviſé par le rayon. C'eſt là la meſure de la force centrifuge avec laquelle le corps preſſe le cercle; & cette force eſt égale & contraire à la force par laquelle ce cercle repouſſe continuellement le corps vers le centre.

PROPOSITION V. PROBLÉME I.

Trouver le point auquel tendent comme centre des forces qui font parcourir une courbe donnée, lors qu'on connoît la vîteſſe du corps à chaque point de cette courbe.

Que les lignes PT, TQV, VR, qui ſe rencontrent aux points T & V, touchent la courbe donnée dans les points P, Q, R, que l'on mene enſuite par ces points & perpendiculairement aux tangentes les droites PA, QB, RC, réciproquement proportionnelles aux vîteſſes dans les mêmes points; c'eſt-à-dire, de ſorte que PA ſoit à QB comme la vîteſſe au point Q eſt à la vîteſſe au point P, & que QB ſoit à RC comme la vîteſſe au point R à la vîteſſe Fig. 14.

au point Q. Cela fait, soient menées à angles droits par les extrémités A, B, C, de ces perpendiculaires les lignes AD, DBE, EC, qui se rencontrent en D & en E : & en tirant les lignes TD, VE, elles se rencontreront au centre cherché S.

Car les perpendiculaires tirées du centre S aux tangentes PT, QT sont (par le Cor. 1. de la Prop. 1.) réciproquement comme les vîtesses du corps aux points P & Q ; donc par la construction elles seront comme les perpendiculaires AP, BQ directement, c'est-à-dire, comme les perpendiculaires abaissées du point D sur ces tangentes. D'où l'on tire facilement, que les points S, T, D sont dans une même ligne droite. On prouvera par le même raisonnement que les points S, E, V sont aussi dans une même ligne droite ; donc le centre S se trouvera dans l'intersection des lignes TD, VE. C. Q. F. D.

PROPOSITION VI. THÉORÉME V.

Si un corps décrit autour d'un centre immobile un orbe quelconque dans un espace non résistant, & qu'on suppose que la fléche de l'arc naissant que ce corps parcourt dans un temps infiniment petit, & qui partage sa corde en deux parties égales, passe, étant prolongée par le centre des forces : la force centripete dans le milieu de l'arc sera en raison directe de cette fléche, & en raison doublée inverse du temps.

Par le Cor. 4. de la Prop. 1. la fléche dans un temps donné est comme la force ; donc, en augmentant le temps en une raison quelconque, la fléche (par les Cor. 2. & 3. du Lemme 11.) augmentera dans la raison doublée du temps ; car l'arc augmente en même raison que le temps, donc la fléche est en raison simple de la force, & en raison doublée du temps, & soustrayant de part & d'autre la raison doublée du temps, la force sera en raison directe de la fléche, & en raison doublée inverse du temps. *C. Q. F. D.*

On pourroit aussi démontrer facilement cette Proposition par le Cor. 4. du Lemme 10.

Cor. 1. Si le corps P en tournant autour du centre S décrit la courbe APQ, & que cette courbe ſoit touchée par la ligne ZPR en un point quelconque P, que d'un autre point quelconque Q de cette courbe, on tire QR parallèle à SP, & qu'on abaiſſe QT perpendiculaire ſur SP: la force centripete ſera réciproquement comme la quantité que devient $\frac{SP^2 \times QT^2}{QR}$ lorſque les points P & Q coïncident; car QR eſt égale à la fléche de l'arc double de QP, dont le milieu eſt P, & le double du triangle SQP ou $SP \times QT$ eſt proportionnel au temps dans lequel cet arc double eſt décrit; ainſi on peut l'écrire à la place de ce temps. Fig. 15.

Cor. 2. On prouvera par le même raiſonnement que la force centripete eſt réciproquement comme la quantité $\frac{SY^2 \times QP^2}{QR}$ pourvû que SY ſoit abaiſſée perpendiculairement du centre des forces ſur la tangente PR de l'orbite; car les rectangles $SY \times QP$ & $SP \times QT$ ſont égaux.

Cor. 3. Si l'orbe PQ eſt un cercle dont la droite PV, qui paſſe par le corps & par le centre des forces, ſoit une corde, ou que cet orbe PQ ait pour cercle oſculateur le cercle dont la corde eſt PV, la force centripete ſera réciproquement comme la quantité $SY^2 \times PV$; car dans cette ſuppoſition $PV = \frac{QP^2}{QR}$

Cor. 4. Les mêmes choſes étant poſées, la force centripete eſt dans la raiſon doublée directe de la vîteſſe, & dans la raiſon inverſe de la corde PV; car par le Cor. 1. de la Propoſ. 1. la vîteſſe eſt réciproquement comme la perpendiculaire SY.

Cor. 5. Donc, ſi on a une figure curviligne quelconque APQ, & dans cette figure un point donné S, vers lequel la force centripete ſoit perpétuellement dirigée, on pourra trouver la loi de la force centripete, par laquelle un corps quelconque P ſera retiré à tout moment du mouvement rectiligne & retenu dans

DU MOUVEMENT DES CORPS.

le périmetre de cette figure, en cherchant la valeur du solide $\frac{SP^2 \times QT^2}{QR}$, ou celle du solide $SY^2 \times PV$, qui sont réciproquement proportionnels à cette force. Nous en donnerons des éxemples dans les Problémes suivans.

PROPOSITION VII. PROBLÉME II.

Trouver la loi de la force centripete qui tend à un point donné, & qui fait décrire à un corps la circonférence d'un cercle.

Fig. 16. Soient $VQPA$ la circonférence du cercle; S le point donné vers lequel la force fait tendre le corps comme à son centre; P un lieu quelconque où l'on suppose le corps arrivé; Q le lieu consécutif; PRZ la tangente du cercle au point P; & PV la corde qui passe par S. Soient de plus VA le diametre qui passe par V; AP la corde tirée de A à P; QT une perpendiculaire à PV, laquelle étant prolongée rencontre la tangente PR en Z; RL la parallele à PV qui passe par Q, & qui rencontre le cercle en L, & la tangente PZ en R.

Cela posé, à cause des triangles semblables ZQR, ZTP, VPA; on aura RP^2, c'est-à-dire, $QR \times RL : QT^2 :: AV^2 : PV^2$; donc $\frac{QR \times RL \times PV^2}{AV^2} = QT^2$; multipliant présentement cette équation par $\frac{SP^2}{QR}$, & écrivant PV au lieu de RL, ce qui est permis lorsque les points P & Q coïncident, on aura $\frac{SP^2 \times PV^3}{AV^2} = \frac{SP^2 \times QT^2}{QR}$ donc, par les Corol. 1. & 5. de la Prop. 6. la force centripete sera réciproquement comme $\frac{SP^2 \times PV^3}{AV^2}$ c'est-à-dire, à cause que AV^2 est donné, réciproquement comme le quarré de la distance ou hauteur SP multipliée par le cube de la corde PV. C. Q. F. T.

AUTRE SOLUTION.

Soit menée la perpendiculaire SY sur la tangente PR prolongée; à cause des triangles semblables SYP, VPA, on aura

$AV : PV :: SP : SY$. Donc $\frac{SP \times PV}{AV} = SY$, & $\frac{SP^2 \times PV^3}{AV^2} = SY^2 \times PV$. Donc par les Cor. 3. & 5. de la Prop. 6. la force centripete est réciproquement comme $\frac{SP^2 \times PV^3}{AV^2}$, c'est-à-dire, à cause que AV est donnée, réciproquement comme $SP^2 \times PV^3$ C. Q. F. T.

Cor. 1. Donc, si le point donné S, auquel la force centripete tend sans cesse, se trouve dans la circonférence de ce cercle, comme en V; la force centripete sera réciproquement comme la cinquiéme puissance de la hauteur SP.

Cor. 2. La force par laquelle le corps P décrit le cercle $APTV$ autour du centre S des forces, est à la force par laquelle ce même corps P peut tourner dans le même tems périodique & dans le même cercle autour d'un autre centre quelconque de forces R, comme $SP \times RP^2$ à SG^3, SG étant une droite menée parallelement à RP, & terminée par la tangente PG. Fig. 17.

Car par la construction, la premiere force est à la derniere comme $RP^2 \times PT^3$ à $SP^2 \times PV^3$ c'est-a-dire, comme $SP \times PR^2$ à $\frac{SP^3 \times PV^3}{PT^3}$, ou bien, à cause des triangles semblables PSG, TPV, comme $SP \times PR^2$ à SG^3.

Cor. 3. La force par laquelle le corps P circule dans un orbe quelconque autour d'un centre de forces S, est à la force, par laquelle ce même corps P peut circuler dans le même temps périodique & dans le même orbe autour d'un autre centre quelconque R de forces, comme $SP \times RP^2$ à SG^3, c'est-à-dire, comme la distance du corps au premier centre des forces S, multipliée par le quarré de la distance au second centre R, est au cube de la ligne SG tirée du premier centre S parallelement à la distance du second centre, & terminée par la tangente PG de l'orbite. Car les forces dans cet orbe sont les mêmes à un de ses points quelconques P, que dans le cercle qui a la même courbure.

Du mouvement des Corps.

PROPOSITION VIII. PROBLÉME III.

On demande la loi de la force centripete dans le cas où le corps décrivant un demi-cercle PQA *tend continuellement vers un point* S *si éloigné, que toutes les lignes* PS, RS *tirées à ce point peuvent être regardées comme paralleles.*

Fig. 18. Par le centre C de ce demi cercle, soit tiré le demi diametre CA coupé perpendiculairement en M & en N par les directions de la force centripete. Tirant CP, on aura, à cause des triangles semblables, CPM, PZT & RZQ, $CP^2 : PM^2 :: PR^2 : QT^2$ & par la nature du cercle $PR^2 = QR \times \overline{RN + QN} =$ (les points Q & P coïncidant) $QR \times 2PM$. Donc $CP^2 : PM^2 :: QR \times 2PM : QT^2$ donc $\frac{QT^2}{QR} = \frac{2PM^3}{CP^2}$ & $\frac{QT^2 \times SP^2}{QR} = \frac{2PM^3 \times SP^2}{CP^2}$; donc, par les Corol. 1. & 5. de la Prop. 6. la force centripete est réciproquement comme $\frac{2PM^3 \times SP^2}{CP^2}$, c'est-à-dire (en négligeant la raison déterminée de $\frac{2SP^2}{CP^2}$) réciproquement comme PM^3. *C. Q. F. T.*

On tireroit facilement la même chose de la Proposition précédente.

SCHOLIE.

Par un raisonnement à peu près semblable, on trouveroit que si le corps décrivoit une ellipse, une hiperbole, ou une Parabole, en vertu d'une force centripete dirigée à un point très-éloigné, cette force centripete seroit encore réciproquement comme le cube de l'ordonnée qui tend à ce point.

PROPOSITION IX. PROBLÉME IV.

Supposé que le corps tourne dans une spirale PQS *qui coupe tous les rayons* SP, SQ, *&c. sous un angle donné : on demande la loi de la force centripete qui tend au centre de cette spirale.*

Fig. 19. Soit supposé constant l'angle indéfiniment petit PSQ, la figure

$S\,P\,R\,Q\,T$, ayant tous ses angles constans, sera donnée d'espece; donc $\frac{QT}{QR}$ sera donnée aussi; donc $\frac{QT^2}{QR}$ sera comme $S\,P$, parceque, comme on vient de le dire, $S\,P\,R\,Q\,T$ est donnée d'espece.

Supposons présentement que l'angle $P\,S\,Q$ change selon une loi quelconque, la droite $Q\,R$ qui soustend l'angle de contact $Q\,P\,R$ changera, par le Lemme 11. en raison doublée de $P\,R$ ou de $Q\,T$. De-là il suit, que la raison de $\frac{Q\,T^2}{Q\,R}$ demeurera la même qu'auparavant, c'est-à-dire qu'elle sera encore comme $S\,P$. C'est pourquoi $\frac{Q\,T^2 \times S\,P^2}{Q\,R}$ sera comme $S\,P^3$; donc par les Corol. 1. & 5. de la Prop. 6. la force centripete sera réciproquement proportionnelle au cube de la distance $S\,P$. C. Q. F. T.

AUTRE SOLUTION.

La perpendiculaire $S\,Y$ abaissée sur la tangente, & la corde $P\,V$ du cercle osculateur étant en raison donnée avec $S\,P$, $S\,P^3$ est proportionnel à $S\,Y^2 \times P\,V$, c'est-à-dire, par les Cor. 3. & 5. de la Prop. 6. réciproquement proportionnel à la force centripete.

LEMME XII.

Tous les parallélogrammes décrits autour des diametres quelconques conjugués d'une ellipse ou d'une hyperbole donnée sont égaux entr'eux.

Cette Proposition est claire par les Coniques.

PROPOSITION X. PROBLÉME V.

Un corps circulant dans une ellipse : on demande la loi de la force centripete qui tend au centre de cette ellipse.

Soient $C\,A$, $C\,B$ les demi axes de l'ellipse; $G\,P$, $D\,K$ d'autres diametres conjugués; $P\,F$, $Q\,T$ des perpendiculaires à ces diametres; $Q\,v$ une ordonnée au diametre $G\,P$; si on acheve le parallélogramme $Q\,v\,P\,R$, on aura par les coniques $P\,v \times v\,G : Q\,v^2$ :: Fig. 20.

$PC^2 : CD^2$. Mais à cause des triangles semblables QvT, PCF, $Qv^2 : QT^2 :: PC^2 : PF^2$. Donc, en composant ces raisons, on aura $Pv \times vG : QT^2 :: PC^2 : CD^2$, & $PC^2 : PF^2$, ou $vG : \frac{QT^2}{Pv} :: PC^2 : \frac{CD^2 \times PF^2}{PC^2}$. Si on écrit présentement QR pour Pv, que l'on mette, à cause du Lemme 12. $BC \times CA$ à la place de $CD \times PF$, & que l'on suppose vG égale à $2PC$, ainsi qu'on le doit lorsque les points P & Q coïncident, on aura, en multipliant les extrémes & les moyens, $\frac{QT^2 \times PC^2}{QR} = \frac{2BC^2 \times CA^2}{PC}$. Donc, par le Cor. 5. de la Prop. 6. la force centripete sera réciproquement comme $\frac{2BC^2 \times AC^2}{PC}$; c'est-à-dire, à cause que $2CB^2 \times CA^2$ est donnée, réciproquement comme $\frac{1}{PC}$; ou, ce qui revient au même, directement comme la distance PC. C. Q. F. T.

AUTRE SOLUTION.

Sur la droite PG de l'autre côté du point T par rapport à P, soit pris le point u en sorte que $Tu = Tv$. Soit pris ensuite uV à vG, comme DC^2 à PC^2. Puisque les coniques donnent $Qv^2 : Pv \times vG :: DC^2 : PC^2$, on aura $Qv^2 = Pv \times uV$, & ajoûtant le rectangle $uP \times Pv$ de part & d'autre, il est clair que le quarré de la corde de l'arc PQ sera égal au rectangle $VP \times Pv$; donc le cercle qui touche la section conique en P & qui passe par le point Q passera aussi par le point V. Supposez à présent que les points P & Q se confondent, la raison de uV à vG, qui est la même que la raison de DC^2 à PC^2, deviendra la raison de PV à PG ou de PV à $2PC$; donc $PV = \frac{2DC^2}{PC}$, donc, par le Cor. 3. de la Propos. 6. la force par laquelle le corps P fait sa révolution dans l'ellipse, sera réciproquement comme $\frac{2DC^2}{PC} \times PF^2$, c'est-à-dire,

à

à cause que $2DC^2 \times PF^2$ est donné, que cette force sera directement comme P C. *C. Q. F. T.*

Cor. 1. La force est donc comme la distance du corps au centre de l'ellipse : & réciproquement, si la force est comme la distance, le corps décrira ou une ellipse dont le centre sera le même que le centre des forces, ou le cercle dans lequel l'ellipse peut se changer.

Cor. 2. Les temps périodiques des révolutions qui se font autour du même centre sont égaux dans toutes les ellipses; car ces temps sont égaux dans les ellipses semblables (par les Cor. 3. & 8. de la Prop. 4.) ; mais dans les ellipses qui ont le grand axe commun, ils sont les uns aux autres directement comme les aires elliptiques totales, & inversement comme les particules de ces aires décrites en temps égal, c'est-à-dire directement comme les petits axes, & inversement comme les vîtesses des corps dans les sommets principaux, ou directement comme les petits axes, & inversement comme les ordonnées au même point de l'axe commun. Mais ces deux raisons directes & inverses qui composent la raison des temps sont alors égales ; donc les temps sont égaux.

SCHOLIE.

Si le centre de l'ellipse s'éloigne à l'infini, & qu'elle devienne une parabole, le corps se mouvera dans cette parabole ; & la force tendant alors à un centre infiniment distant, elle deviendra uniforme. C'est le cas traité par *Galilée.* Si (en changeant l'inclinaison du plan au cône coupé) la parabole se change en une hiperbole, le corps se mouvera dans le périmetre de cette hyperbole, la force centripete se changeant alors en force centrifuge ; & de même que dans le cercle ou l'ellipse, si les forces tendent au centre de la figure placé sur l'abscisse, en augmentant ou diminuant les ordonnées en une raison donnée quelconque, ou en changeant l'angle d'inclinaison des ordonnées sur l'abscisse, ces forces augmenteront ou diminueront toujours en raison des dis-

tançes au centre, pourvû que les temps périodiques demeurent égaux : ainsi dans toutes les courbes, si les ordonnées augmentent ou diminuent dans une raison donnée quelconque, ou que l'angle de ces ordonnées change d'une façon quelconque, le temps périodique & le centre des forces, qu'on suppose placé à volonté sur l'abscisse, demeurans les mêmes, les forces centripetes aux extrémités des ordonnées correspondantes seront entr'elles comme les distances au centre.

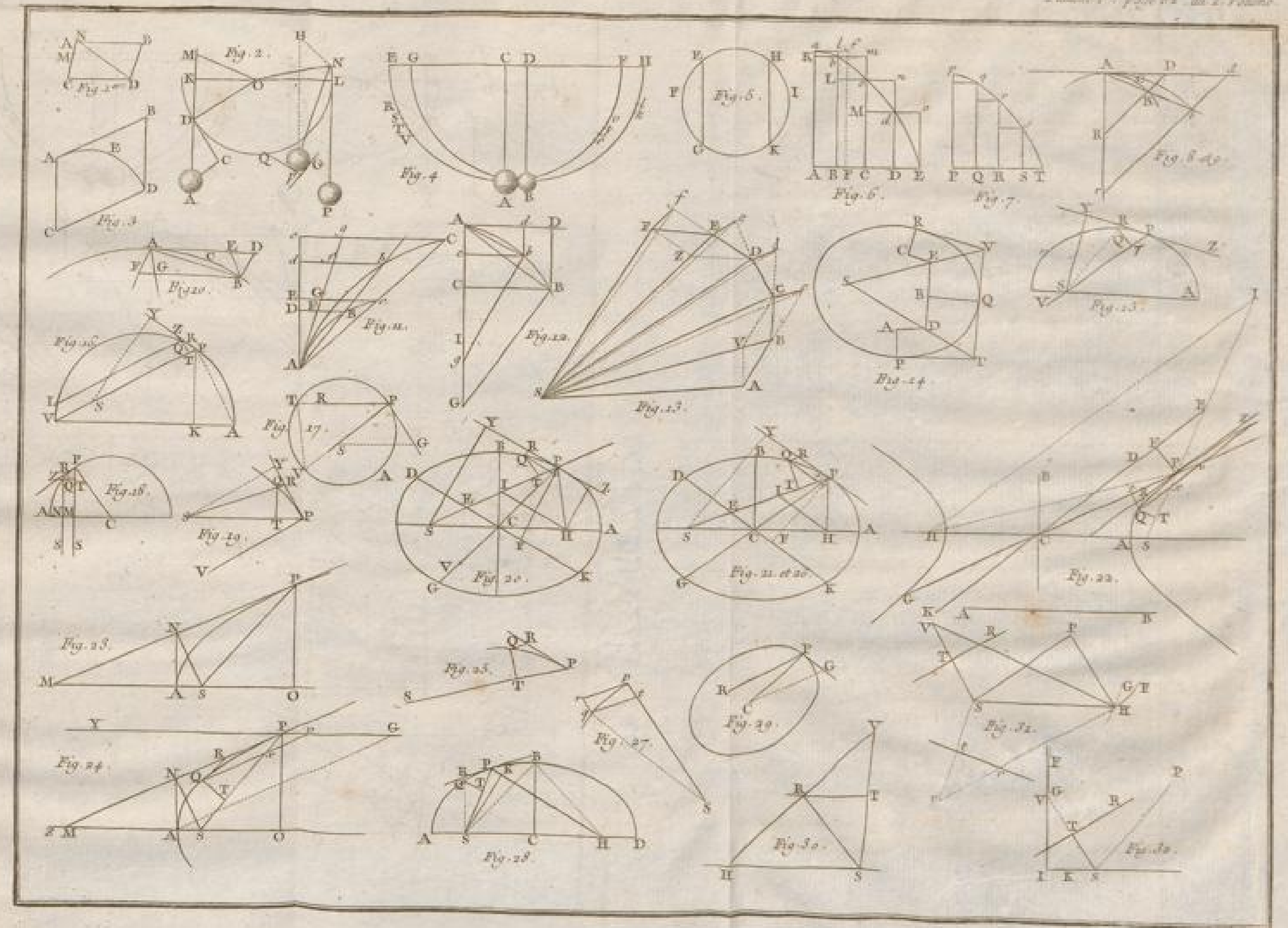
TROISIÉME SECTION.

Du mouvement des corps dans les Sections coniques excentriques.

PROPOSITION XI. PROBLEME VI.

Un corps faisant sa révolution dans une ellipse ; on demande la loi de la force centripete, lorsqu'elle tend à un de ses foyers.

Soient S le foyer de l'ellipse, E la rencontre de SP avec le diametre DK, x celle de la même ligne SP avec l'ordonnée QV, $Qx\ PR$ le parallélogramme fait sur Px & Qx. On voit d'abord
Fig. 21. que EP est égale au demi grand axe AC ; car menant par l'autre foyer H la droite HI parallele à DK, il est clair que EI sera égale à SE à cause de l'égalité qui est entre CH & CS, & par conséquent PE sera égale à la moitié de la somme de PI & de PS, ou, ce qui revient au même, à AC, moitié de la somme de PS & de PH, puisqu'il suit de ce que HI est parallele à RP, & de ce que les angles HPZ & IPR sont égaux, que $HP = PI$. Abaissant ensuite QT perpendiculaire à SP, & nommant L le parametre du grand axe, c'est-à-dire $\frac{2BC^2}{AC}$; on verra que $L \times QR : L \times Pv :: QR : Pv$, c'est-à-dire $:: PE$ ou $AC : PC$; mais $L \times Pv : Gv \times vP :: L : Gv$ & $Gv \times vP : Qv^2 :: PC^2 : CD^2$; de plus, $Qv^2 : Qx^2$ en raison d'égalité (Cor. 2. Lem. 7.)


Fig. 1re
Fig. 2.
Fig. 3
Fig. 4
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8 et 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.
Fig. 13.
Fig. 14.
Fig. 16.
Fig. 17.
Fig. 18.
Fig. 19.
Fig. 20.
Fig. 21. et 20.
Fig. 22.
Fig. 23.
Fig. 24.
Fig. 25.
Fig. 27.
Fig. 28.
Fig. 29.
Fig. 30.
Fig. 31.
Fig. 32.